高中数学-1-集合与简易逻辑

1 集合与简易逻辑

1.1 元素与集合的关系

$x \in A \Leftrightarrow x \notin C_U A$, $x \in C_U A \Leftrightarrow x \notin A$.

1.2 德摩根公式

$C_U(A \cap B) = C_U A \cup C_U B; C_U(A \cup B) = C_U A \cap C_U B$.

1.3 包含关系

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow C_U B \subseteq C_U A$$
$$\Leftrightarrow A \cap C_U B = \Phi \Leftrightarrow C_U A \cup B = R$$

1.4 容斥原理

$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$.

1.5 集合子集

集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的子集个数共有 2^n 个；真子集有 2^n –1 个；非空子集有 2^n –1 个；非空的真子集有 2^n –2 个.

1.6 二次函数的解析式的三种形式

(1)一般式 $f(x) = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$;

(2)顶点式 $f(x) = a(x-h)^2 + k(a \neq 0)$;

(3)零点式 $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(a \neq 0)$.

1.7 解连不等式

$N < f(x) < M$ 常有以下转化形式

$$N < f(x) < M \Leftrightarrow [f(x) - M][f(x) - N] < 0$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - \frac{M+N}{2}| < \frac{M-N}{2} \Leftrightarrow \frac{f(x)-N}{M-f(x)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-N} > \frac{1}{M-N}.$$

1.8 方程实根条件

$f(x)=0$ 在 (k_1,k_2) 上有且只有一个实根,与 $f(k_1)f(k_2)<0$ 不等价,前者是后者的一个必要而不是充分条件.特别地，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有且只有一个实根在 (k_1,k_2) 内,等价于 $f(k_1)f(k_2)<0$,或 $f(k_1)=0$ 且 $k_1<-\frac{b}{2a}<\frac{k_1+k_2}{2}$,或 $f(k_2)=0$ 且 $\frac{k_1+k_2}{2}<-\frac{b}{2a}<k_2$.

1.9 闭区间上的二次函数的最值

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在闭区间 $[p,q]$ 上的最值只能在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处及区间的两端点处取得，具体如下：

(1) 当 a>0 时，若 $x=-\frac{b}{2a}\in[p,q]$，则 $f(x)_{\min}=f(-\frac{b}{2a}), f(x)_{\max}=_{\max}\{f(p),f(q)\}$；

$x=-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$，$f(x)_{\max}=_{\max}\{f(p),f(q)\}$，$f(x)_{\min}=_{\min}\{f(p),f(q)\}$.

(2) 当 a<0 时，若 $x=-\frac{b}{2a}\in[p,q]$，则 $f(x)_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$，

$x=-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$，则 $f(x)_{\max}=\max\{f(p),f(q)\}$，$f(x)_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$.

1.10 一元二次方程的实根分布

依据：若 $f(m)f(n)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 (m,n) 内至少有一个实根 .

设 $f(x)=x^2+px+q$，则

（1）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(m,+\infty)$ 内有根的充要条件为 $f(m)=0$ 或 $\begin{cases}p^2-4q\geq 0\\ -\frac{p}{2}>m\end{cases}$；

（2）方程 $f(x)=0$ 在区间 (m,n) 内有根的充要条件为 $f(m)f(n)<0$ 或 $\begin{cases}f(m)>0\\ f(n)>0\\ p^2-4q\geq 0\\ m<-\frac{p}{2}<n\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(m)=0\\ f(n)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(n)=0\\ f(m)>0\end{cases}$；

（3）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-\infty,n)$ 内有根的充要条件为 $f(m)<0$ 或 $\begin{cases}p^2-4q\geq 0\\ -\frac{p}{2}<m\end{cases}$.

1.11 定区间上含参数的二次不等式恒成立的条件依据

(1) 在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间 L（形如 $[\alpha,\beta]$，$(-\infty,\beta]$，$[\alpha,+\infty)$ 不同）上含参数的二次不等式 $f(x,t)\geq 0$（t 为参数）恒成立的充要条件是 $f(x,t)_{\min}\geq 0(x\notin L)$.

(2) 在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间上含参数的二次不等式 $f(x,t)\geq 0$（t 为参数）恒成立的充要条件是

$f(x,t)_{man} \le 0(x \notin L)$.

(3) $f(x) = ax^4 + bx^2 + c > 0$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases} a \ge 0 \\ b \ge 0 \\ c > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$.

1.12 真值表

p	q	非 p	p 或 q	p 且 q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

1.13 常见结论的否定形式

原结论	反设词	原结论	反设词
是	不是	至少有一个	一个也没有
都是	不都是	至多有一个	至少有两个
大于	不大于	至少有 n 个	至多有（$n-1$）个
小于	不小于	至多有 n 个	至少有（$n+1$）个
对所有 x，成立	存在某 x，不成立	p 或 q	$\neg p$ 且 $\neg q$
对任何 x，不成立	存在某 x，成立	p 且 q	$\neg p$ 或 $\neg q$

1.14 四种命题的相互关系

原命题：与逆命题互逆，与否命题互否，与逆否命题互为逆否；
逆命题：与原命题互逆，与逆否命题互否，与否命题互为逆否；
否命题：与原命题互否，与逆命题互为逆否，与逆否命题互逆；
逆否命题：与逆命题互否，与否命题互逆，与原命题互为逆否；

1.15 充要条件

（1）充分条件：若 $p \Rightarrow q$，则 p 是 q 充分条件.
（2）必要条件：若 $q \Rightarrow p$，则 p 是 q 必要条件.
（3）充要条件：若 $p \Rightarrow q$，且 $q \Rightarrow p$，则 p 是 q 充要条件.

注：如果甲是乙的充分条件，则乙是甲的必要条件；反之亦然.