Contents

1.1 函数的单调性

(1) 设 $x_1 \cdot x_2 \in [a,b], x_1 \neq x_2$ 那么

$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是增函数;

$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是减函数.

(2) 设函数 $y = f(x)$ 在某个区间内可导，如果 $f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 为增函数；如果 $f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 为减函数.

1.2 减函数和增函数

如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是减函数,则在公共定义域内,和函数 $f(x)+g(x)$ 也是减函数; 如果函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 在其对应的定义域上都是减函数,则复合函数 $y = f[g(x)]$ 是增函数.

1.3 奇偶函数的图象特征

奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称;反过来，如果一个函数的图象关于原点对称，那么这个函数是奇函数；如果一个函数的图象关于 y 轴对称，那么这个函数是偶函数.

1.4 偶函数

若函数 $y = f(x)$ 是偶函数，则 $f(x+a) = f(-x-a)$；若函数 $y = f(x+a)$ 是偶函数，则 $f(x+a) = f(-x+a)$.

1.5 函数的对称性

对于函数 $y = f(x)$ ($x \in R$), $f(x+a) = f(b-x)$ 恒成立,则函数 $f(x)$ 的对称轴是函数 $x = \dfrac{a+b}{2}$；两个函数 $y = f(x+a)$ 与 $y = f(b-x)$ 的图象关于直线 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 对称.

1.6 函数的点对称和周期性

若 $f(x) = -f(-x+a)$,则函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\dfrac{a}{2}, 0)$ 对称;

若 $f(x) = -f(x+a)$,则函数 $y = f(x)$ 为周期为 $2a$ 的周期函数.

1.7 多项式函数奇偶性

多项式函数 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ 的奇偶性

多项式函数 $P(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的偶次项(即奇数项)的系数全为零.

多项式函数 $P(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的奇次项(即偶数项)的系数全为零.

1.8 函数的图象的对称性

(1)函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)$

$\Leftrightarrow f(2a-x)=f(x)$.

(2)函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+mx)=f(b-mx)$

$\Leftrightarrow f(a+b-mx)=f(mx)$.

1.9 两个函数图象的对称性

(1) 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 的图象关于直线 $x=0$ (即 y 轴)对称.

(2) 函数 $y=f(mx-a)$ 与函数 $y=f(b-mx)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2m}$ 对称.

(3) 函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 y=x 对称.

1.10 函数的平移

若将函数 $y=f(x)$ 的图象右移 a 、上移 b 个单位，得到函数 $y=f(x-a)+b$ 的图象；若将曲线 $f(x,y)=0$ 的图象右移 a 、上移 b 个单位，得到曲线 $f(x-a,y-b)=0$ 的图象.

1.11 互为反函数的两个函数的关系

$f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$.

1.12 反函数

若函数 $y=f(kx+b)$ 存在反函数,则其反函数为 $y=\frac{1}{k}[f^{-1}(x)-b]$,并不是 $y=[f^{-1}(kx+b)$,而函数 $y=[f^{-1}(kx+b)$ 是 $y=\frac{1}{k}[f(x)-b]$ 的反函数.

1.13 几个常见的函数方程

(1) 正比例函数 $f(x)=cx$，$f(x+y)=f(x)+f(y), f(1)=c$.

(2) 指数函数 $f(x)=a^x$，$f(x+y)=f(x)f(y), f(1)=a\neq 0$.

(3) 对数函数 $f(x)=\log_a x$，$f(xy)=f(x)+f(y), f(a)=1(a>0,a\neq 1)$.

(4) 幂函数 $f(x)=x^\alpha$，$f(xy)=f(x)f(y), f'(1)=\alpha$.

(5) 余弦函数 $f(x)=\cos x$, 正弦函数 $g(x)=\sin x$， $f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$，$f(0)=1,\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=1$.

1.14 几个函数方程的周期(约定 a>0)

（1） $f(x)=f(x+a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=a;

（2） $f(x)=f(x+a)=0$，

或 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，或 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，

或 $\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}=f(x+a),(f(x)\in[0,1])$，则 $f(x)$ 的周期 T=2a

(3) $f(x)=1-\frac{1}{f(x+a)}(f(x)\neq 0)$，则 $f(x)$ 的周期 T=3a;

(4) $f(x_1+x_2)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{1-f(x_1)f(x_2)}$ 且 $f(a)=1(f(x_1)\cdot f(x_2)\neq 1, 0<|x_1-x_2|<2a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=4a;

(5) $f(x)+f(x+a)+f(x+2a)f(x+3a)+f(x+4a)=f(x)f(x+a)f(x+2a)f(x+3a)f(x+4a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=5a;

(6) $f(x+a)=f(x)-f(x+a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=6a.

1.15 分数指数幂

(1) $a^{\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$（$a>0,m,n\in N^*$，且 $n>1$）.

(2) $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$（$a>0,m,n\in N^*$，且 $n>1$）.

1.16 根式的性质

（1） $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

（2）当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, a\geq 0\\ -a, a<0\end{cases}$.

1.17 有理指数幂的运算性质

(1) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in Q)$.

(2) $(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in Q)$.

(3) $(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in Q)$.

注： 若 a>0，p 是一个无理数，则 a^p 表示一个确定的实数．上述有理指数幂的运算性质，对于无理数指数幂都适用．

1.18 指数式与对数式的互化式

$\log_a N=b\Leftrightarrow a^b=N\ (a>0,a\neq 1,N>0)$.

1.19 对数的换底公式

$\log_a N = \dfrac{\log_m N}{\log_m a}$ （$a>0$，且 $a\neq 1$，$m>0$，且 $m\neq 1$，$N>0$）.

推论 $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b$（$a>0$，且 $a>1$，$m,n>0$，且 $m\neq 1$，$n\neq 1$，$N>0$）.

1.20 对数的四则运算法则

若 a>0，a≠1，M>0，N>0，则

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a M^n = n\log_a M\,(n\in R)$.

1.21 Log 函数

设函数 $f(x)=\log_m(ax^2+bx+c)(a\neq 0)$，记 $\Delta=b^2-4ac$.若 $f(x)$ 的定义域为 R，则 $a>0$，且 $\Delta<0$；若 $f(x)$ 的值域为 R，则 $a>0$，且 $\Delta\geq 0$.对于 $a=0$ 的情形,需要单独检验.

1.22 对数换底不等式及其推广

若 $a>0$，$b>0$，$x>0$，$x\neq\dfrac{1}{a}$，则函数 $y=\log_{ax}(bx)$

(1) 当 $a>b$ 时，在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 和 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上 $y=\log_{ax}(bx)$ 为增函数.

(2) 当 $a<b$ 时，在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 和 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上 $y=\log_{ax}(bx)$ 为减函数.

推论:设 $n>m>1$，$p>0$，$a>0$，且 $a\neq 1$，则

（1）$\log_{m+p}(n+p)<\log_m n$.

（2）$\log_a m\log_a n<\log_a{}^2\dfrac{m+n}{2}$.