

目录

1.1 常见三角不等式	2
1.2 同角三角函数的基本关系式	2
1.3 正弦、余弦的诱导公式（奇变偶不变，符号看象限）	2
1.4 和角与差角公式	2
1.5 二倍角公式	2
1.6 三倍角公式	3
1.7 三角函数的周期公式	3
1.8 正弦定理	3
1.9 余弦定理	3
1.10 面积定理	3
1.11 三角形内角和定理	3
1.12 简单的三角方程的通解	4
1.13 最简单的三角不等式及其解集	4

1.1 常见三角不等式

- (1) 若 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\sin x < x < \tan x$.
- (2) 若 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $1 < \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$.
- (3) $|\sin x| + |\cos x| \geq 1$.

1.2 同角三角函数的基本关系式

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \tan \theta \cdot \cot \theta = 1.$$

1.3 正弦、余弦的诱导公式 (奇变偶不变, 符号看象限)

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sin \alpha, & (n \text{ 为偶数}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \alpha, & \dots \dots \dots \end{cases}$$
$$\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \cos \alpha, & (n \text{ 为偶数}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \alpha, & \dots \dots \dots \end{cases}$$

1.4 和角与差角公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta ;$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta ;$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} .$$
$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \text{ (平方正弦公式);}$$
$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta .$$
$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi) \text{ (辅助角 } \varphi \text{ 所在象限由点 } (a, b) \text{ 的象限决定, } \tan \varphi = \frac{b}{a} \text{)} .$$

1.5 二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha .$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha .$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} .$$

1.6 三倍角公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 4\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right).$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right). \quad \tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta} = \tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right).$$

1.7 三角函数的周期公式

函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbb{R}$ 及函数 $y = \cos(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbb{R}$ (A, ω, φ 为常数, 且 $A \neq 0$, $\omega > 0$) 的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$;

函数 $y = \tan(\omega x + \varphi)$, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ (A, ω, φ 为常数, 且 $A \neq 0$, $\omega > 0$) 的周期 $T = \frac{\pi}{\omega}$.

1.8 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

1.9 余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

1.10 面积定理

$$(1) S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \quad (h_a, h_b, h_c \text{ 分别表示 } a, b, c \text{ 边上的高}).$$

$$(2) S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B.$$

$$(3) S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\sqrt{(|OA| \cdot |OB|)^2 - (OA \cdot OB)^2}.$$

1.11 三角形内角和定理

在 $\triangle ABC$ 中, 有 $A + B + C = \pi \Leftrightarrow C = \pi - (A + B)$

$$\Leftrightarrow \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \Leftrightarrow 2C = 2\pi - 2(A+B).$$

1.12 简单的三角方程的通解

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = k\pi + (-1)^k \arcsin a (k \in \mathbb{Z}, |a| \leq 1).$$

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \arccos a (k \in \mathbb{Z}, |a| \leq 1).$$

$$\tan x = a \Rightarrow x = k\pi + \arctan a (k \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}).$$

特别地, 有

$$\sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \alpha = k\pi + (-1)^k \beta (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \pm \beta (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\tan \alpha = \tan \beta \Rightarrow \alpha = k\pi + \beta (k \in \mathbb{Z}).$$

1.13 最简单的三角不等式及其解集

$$\sin x > a (|a| \leq 1) \Leftrightarrow x \in (2k\pi + \arcsin a, 2k\pi + \pi - \arcsin a), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x < a (|a| \leq 1) \Leftrightarrow x \in (2k\pi - \pi - \arcsin a, 2k\pi + \arcsin a), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x > a (|a| \leq 1) \Leftrightarrow x \in (2k\pi - \arccos a, 2k\pi + \arccos a), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x < a (|a| \leq 1) \Leftrightarrow x \in (2k\pi + \arccos a, 2k\pi + 2\pi - \arccos a), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\tan x > a (a \in \mathbb{R}) \Rightarrow x \in (k\pi + \arctan a, k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\tan x < a (a \in \mathbb{R}) \Rightarrow x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \arctan a), k \in \mathbb{Z}.$$