目录：

1 极 限

1.1 特殊数列的极限

（1）$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q|<1 \\ 1 & q=1 \\ \text{不存在} & |q|<1\text{或}q=-1 \end{cases}$.

（2）$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_0}{b_t n^t + b_{t-1}n^{t-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} 0 & (k<t) \\ \dfrac{a_t}{b_k} & (k=t) \\ \text{不存在} & (k>t) \end{cases}$.

（3）$S = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1}{1-q}$（$S$ 无穷等比数列$\{a_1 q^{n-1}\}$（$|q|<1$）的和）.

1.2 函数的极限定理

$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = a$.

1.3 函数的夹逼性定理

如果函数 f(x)，g(x)，h(x)在点 x_0 的附近满足：

（1）$g(x) \le f(x) \le h(x)$；

（2）$\lim_{x\to x_0} g(x) = a, \lim_{x\to x_0} h(x) = a$（常数）,则 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

本定理对于单侧极限和 $x\to\infty$ 的情况仍然成立.

1.4 几个常用极限

（1）$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$，$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$（$|a|<1$）；

（2）$\lim_{x\to x_0} x = x_0$，$\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x_0}$.

1.5 两个重要的极限

（1）$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$；

（2）$\lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ **(e=2.718281845…).**

1.6 函数极限的四则运算法则

若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$， $\lim_{x\to x_0} g(x)=b$，则

(1) $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=a\pm b$；

(2) $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=a\cdot b$；

(3) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}(b\neq 0)$.

1.7 数列极限的四则运算法则

若 $\lim_{n\to\infty} a_n=a, \lim_{n\to\infty} b_n=b$，则

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$；

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$；

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}(b\neq 0)$

(4) $\lim_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=\lim_{n\to\infty} c\cdot\lim_{n\to\infty} a_n=c\cdot a$ **(c 是常数).**

2 导 数

2.1 $f(x)$ **在** x_0 **处的导数（或变化率或微商）**

$$f'(x_0)=y'\big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

2.2 瞬时速度

$$\upsilon=s'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

2.3 瞬时加速度

$$a=v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}.$$

190. $f(x)$ 在 (a,b) 的导数

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

2.4 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数是曲线 $y=f(x)$ 在 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率 $f'(x_0)$，相应的切线方程是 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

2.5 几种常见函数的导数

(1) $C'=0$（C 为常数）.
(2) $(x_n)^{'}=nx^{n-1}(n\in Q)$.
(3) $(\sin x)'=\cos x$.
(4) $(\cos x)'=-\sin x$.
(5) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$；$(\log a^x)'=\frac{1}{x}\log_a{}^e$.
(6) $(e^x)'=e^x$；$(a^x)'=a^x\ln a$.

2.6 导数的运算法则

（1）$(u\pm v)^{'}=u^{'}\pm v^{'}$.
（2）$(uv)^{'}=u^{'}v+uv^{'}$.
（3）$(\frac{u}{v})^{'}=\frac{u^{'}v-uv^{'}}{v^2}(v\neq 0)$.

2.7 复合函数的求导法则

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处有导数 $u_x^{'}=\varphi^{'}(x)$，函数 $y=f(u)$ 在点 x 处的对应点 U 处有导数 $y_u^{'}=f^{'}(u)$，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 处有导数，且 $y_x^{'}=y_u^{'}\cdot u_x^{'}$，或写作 $f_x^{'}(\varphi(x))=f^{'}(u)\varphi^{'}(x)$.

2.8 常用的近似计算公式

(1) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$；$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$；
(2) $(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x(\alpha\in R)$；$\frac{1}{1+x}\approx 1-x$；
(3) $e^x\approx 1+x$；
(4) $l_n(1+x)\approx x$；
(5) $\sin x\approx x$（x 为弧度）；
(6) $\tan x\approx x$（x 为弧度）；
(7) $\arctan x\approx x$（x 为弧度）

2.9 判别是极大（小）值的方法

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续时，

（1）如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，则 $f(x_0)$ 是极大值；

（2）如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 是极小值.