

目录:

1.1 实数与向量的积的运算律 2

1.2 向量的数量积的运算律: 2

1.3 平面向量基本定理 2

1.4 向量平行的坐标表示 2

1.5 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 的几何意义 2

1.6 平面向量的坐标运算 2

1.7 63.两向量的夹角公式 2

1.8 64.平面两点间的距离公式 3

1.9 65.向量的平行与垂直 3

1.10 线段的定比分公式 3

1.11 三角形的重心坐标公式 3

1.12 点的平移公式 3

1.13 “按向量平移”的几个结论 3

1.14 三角形五“心”向量形式的充要条件 4

1.1 实数与向量的积的运算律

设 λ 、 μ 为实数，那么

- (1) 结合律: $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$;
- (2) 第一分配律: $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
- (3) 第二分配律: $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$.

1.2 向量的数量积的运算律:

- (1) $a \cdot b = b \cdot a$ (交换律);
- (2) $(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) = \lambda a \cdot b = a \cdot (\lambda b)$;
- (3) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

1.3 平面向量基本定理

如果 e_1 、 e_2 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量，有且只有一对实数 λ_1 、 λ_2 ，使得 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ 。

不共线的向量 e_1 、 e_2 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底。

1.4 向量平行的坐标表示

设 $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$ ，且 $b \neq 0$ ，则 $a \parallel b (b \neq 0) \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ 。

53. a 与 b 的数量积(或内积)

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta.$$

1.5 $a \cdot b$ 的几何意义

数量积 $a \cdot b$ 等于 a 的长度 $|a|$ 与 b 在 a 的方向上的投影 $|b| \cos \theta$ 的乘积。

1.6 平面向量的坐标运算

- (1) 设 $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$ ，则 $a+b = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ 。
- (2) 设 $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$ ，则 $a-b = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ 。
- (3) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ，则 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 。
- (4) 设 $a = (x, y)$, $\lambda \in R$ ，则 $\lambda a = (\lambda x, \lambda y)$ 。
- (5) 设 $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$ ，则 $a \cdot b = (x_1 x_2 + y_1 y_2)$ 。

1.7 63. 两向量的夹角公式

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad (a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)).$$

1.8 64.平面两点间的距离公式

$$d_{A,B} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \\ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)).$$

1.9 65.向量的平行与垂直

设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, 且 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 则

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} (\mathbf{a} \neq \mathbf{0}) \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0.$$

1.10 线段的定比分公式

设 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P(x, y)$ 是线段 P_1P_2 的分点, λ 是实数, 且 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$, 则

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OP_1} + \lambda \overrightarrow{OP_2}}{1 + \lambda} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = t \overrightarrow{OP_1} + (1-t) \overrightarrow{OP_2} \quad (t = \frac{1}{1 + \lambda}).$$

1.11 三角形的重心坐标公式

$\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$, 则 $\triangle ABC$ 的重心的坐标是 $G(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$.

1.12 点的平移公式

$$\begin{cases} x' = x + h \\ y' = y + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - h \\ y = y' - k \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'}.$$

注: 图形 F 上的任意一点 $P(x, y)$ 在平移后图形 F' 上的对应点为 $P'(x', y')$, 且 $\overrightarrow{PP'}$ 的坐标为 (h, k) .

1.13 “按向量平移”的几个结论

- (1) 点 $P(x, y)$ 按向量 $\mathbf{a} = (h, k)$ 平移后得到点 $P'(x + h, y + k)$.
- (2) 函数 $y = f(x)$ 的图象 C 按向量 $\mathbf{a} = (h, k)$ 平移后得到图象 C' , 则 C' 的函数解析式为 $y = f(x - h) + k$.
- (3) 图象 C' 按向量 $\mathbf{a} = (h, k)$ 平移后得到图象 C , 若 C 的解析式 $y = f(x)$, 则 C' 的函数解析式为 $y = f(x + h) - k$.
- (4) 曲线 $C: f(x, y) = 0$ 按向量 $\mathbf{a} = (h, k)$ 平移后得到图象 C' , 则 C' 的方程为 $f(x - h, y - k) = 0$.
- (5) 向量 $\mathbf{m} = (x, y)$ 按向量 $\mathbf{a} = (h, k)$ 平移后得到的向量仍然为 $\mathbf{m} = (x, y)$.

1.14 三角形五“心”向量形式的充要条件

设 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，角 A, B, C 所对边长分别为 a, b, c ，则

- (1) O 为 $\triangle ABC$ 的外心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2$.
- (2) O 为 $\triangle ABC$ 的重心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$.
- (3) O 为 $\triangle ABC$ 的垂心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$.
- (4) O 为 $\triangle ABC$ 的内心 $\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$.
- (5) O 为 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的旁心 $\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA} = b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$.

