

目录:

1 直线和圆的方程	4
1.1 斜率公式	4
1.2 直线的五种方程	4
1.3 两条直线的平行和垂直	4
1.4 夹角公式	4
1.5 两条直线的角公式	5
1.6 四种常用直线系方程	5
1.7 点到直线的距离	5
1.8 直线与轴线的围扩面积	5
1.9 曲线与轴线的围扩面积	6
1.10 圆的四种方程	6
1.11 圆系方程	6
1.12 点与圆的位置关系	6
1.13 直线与圆的位置关系	7
1.14 两圆位置关系的判定方法	7
1.15 圆的切线方程	7
2 圆锥曲线方程	8
2.1 椭圆的参数方程	8
2.2 椭圆的焦半径公式	8
2.3 椭圆的的内外部	8
2.4 椭圆的切线方程	8
2.5 双曲线	8
2.6 双曲线的内外部	9
2.7 双曲线的方程与渐近线方程的关系	9
2.8 双曲线的切线方程	9
2.9 抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦半径公式	9

2.10 抛物线	9
2.11 二次函数	10
2.12 抛物线的内外部	10
2.13 抛物线的切线方程	10
2.14 两个常见的曲线系方程	10
2.15 直线与圆锥曲线相交的弦长公式	10
2.16 圆锥曲线的两类对称问题	11
2.17 “四线” 一方程	11
3 立体几何	12
3.1 证明直线与直线的平行的思考途径	12
3.2 证明直线与平面的平行的思考途径	12
3.3 证明平面与平面平行的思考途径	12
3.4 证明直线与直线的垂直的思考途径	12
3.5 证明直线与平面垂直的思考途径	12
3.6 证明平面与平面的垂直的思考途径	12
3.7 空间向量的加法与数乘向量运算的运算律	12
3.8 平面向量加法的平行四边形法则向空间的推广	12
3.9 共线向量定理	12
3.10 共面向量定理	13
3.11 空间点向量	13
3.12 空间向量基本定理	13
3.13 射影公式	13
3.14 向量的直角坐标运算	13
3.15 空间中的两点之间的向量计算	13
3.16 空间的线线平行或垂直	14
3.17 向量夹角公式	14
3.18 四面体的对棱所成的角	14
3.19 异面直线所成角	14

3.20 直线 AB 与平面所成角14

3.21 三角形与所在平面15

3.22 二面角的平面角15

3.23 三余弦定理15

3.24 三射线定理15

3.25 空间两点间的距离公式15

3.26 点 Q 到直线 l 距离15

3.27 异面直线间的距离16

3.28 点 B 到平面 α 的距离16

3.29 异面直线上两点距离公式16

3.30 三个向量和的平方公式16

3.31 空间直线的射影16

3.32 面积射影定理16

3.33 斜棱柱的直截面17

3.34 作截面的依据17

3.35 棱锥的平行截面的性质17

3.36 欧拉定理(欧拉公式).....17

3.37 球的面积和体积公式17

3.38 球的组合体17

3.39 柱体、锥体的体积18

1 直线和圆的方程

1.1 斜率公式

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)).$$

1.2 直线的五种方程

- (1) 点斜式 $y - y_1 = k(x - x_1)$ (直线 l 过点 $P_1(x_1, y_1)$, 且斜率为 k).
- (2) 斜截式 $y = kx + b$ (b 为直线 l 在 y 轴上的截距).
- (3) 两点式 $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ ($y_1 \neq y_2$) ($P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2$)).
- (4) 截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (a, b 分别为直线的横、纵截距, $a, b \neq 0$).
- (5) 一般式 $Ax + By + C = 0$ (其中 A, B 不同时为 0).

1.3 两条直线的平行和垂直

- (1) 若 $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2$
 - ① $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$;
 - ② $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$.
- (2) 若 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, 且 A_1, A_2, B_1, B_2 都不为零,
 - ① $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;
 - ② $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$;

1.4 夹角公式

- (1) $\tan \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$.
($l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2, k_1 k_2 \neq -1$)
 - (2) $\tan \alpha = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|$.
($l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0, A_1 A_2 + B_1 B_2 \neq 0$).
- 直线 $l_1 \perp l_2$ 时, 直线 l_1 与 l_2 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$.

1.5 两条直线的角公式

$$(1) \tan \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$$

$$(l_1: y = k_1 x + b_1, l_2: y = k_2 x + b_2, k_1 k_2 \neq -1)$$

$$(2) \tan \alpha = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

$$(l_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, l_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, A_1 A_2 + B_1 B_2 \neq 0).$$

直线 $l_1 \perp l_2$ 时, 直线 l_1 到 l_2 的角是 $\frac{\pi}{2}$.

1.6 四种常用直线系方程

(1) 定点直线系方程: 经过定点 $P_0(x_0, y_0)$ 的直线系方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$ (除直线 $x = x_0$), 其中 k 是待定的系数; 经过定点 $P_0(x_0, y_0)$ 的直线系方程为 $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, 其中 A, B 是待定的系数.

(2) 共点直线系方程: 经过两直线 $l_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $l_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ 的交点的直线系方程为 $(A_1 x + B_1 y + C_1) + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$ (除 l_2), 其中 λ 是待定的系数.

(3) 平行直线系方程: 直线 $y = kx + b$ 中当斜率 k 一定而 b 变动时, 表示平行直线系方程. 与直线 $Ax + By + C = 0$ 平行的直线系方程是 $Ax + By + \lambda = 0$ ($\lambda \neq 0$), λ 是参变量.

(4) 垂直直线系方程: 与直线 $Ax + By + C = 0$ ($A \neq 0, B \neq 0$) 垂直的直线系方程是 $Bx - Ay + \lambda = 0$, λ 是参变量.

1.7 点到直线的距离

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ (点 } P(x_0, y_0), \text{ 直线 } l: Ax + By + C = 0).$$

1.8 直线与轴线的围扩面积

$Ax + By + C > 0$ 或 < 0 所表示的平面区域

设直线 $l: Ax + By + C = 0$, 则 $Ax + By + C > 0$ 或 < 0 所表示的平面区域是:

若 $B \neq 0$, 当 B 与 $Ax + By + C$ 同号时, 表示直线 l 的上方的区域; 当 B 与 $Ax + By + C$ 异号时, 表示直线 l 的下方的区域. 简言之, 同号在上, 异号在下.

若 $B = 0$, 当 A 与 $Ax + By + C$ 同号时, 表示直线 l 的右方的区域; 当 A 与 $Ax + By + C$ 异号时, 表示直线 l 的左方的区域. 简言之, 同号在右, 异号在左.

1.9 曲线与轴线的围扩面积

$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) > 0$ 或 < 0 所表示的平面区域

设曲线 $C: (A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ ($A_1A_2B_1B_2 \neq 0$), 则

$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) > 0$ 或 < 0 所表示的平面区域是:

$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) > 0$ 所表示的平面区域上下两部分;

$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) < 0$ 所表示的平面区域上下两部分.

1.10 圆的四种方程

(1) 圆的标准方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

(2) 圆的一般方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ($D^2 + E^2 - 4F > 0$).

(3) 圆的参数方程 $\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}$.

(4) 圆的直径式方程 $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$ (圆的直径的端点是 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$).

1.11 圆系方程

(1) 过点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 的圆系方程是

$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) + \lambda[(x-x_1)(y_1-y_2) - (y-y_1)(x_1-x_2)] = 0$$

$\Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) + \lambda(ax+by+c) = 0$, 其中 $ax+by+c=0$ 是直线 AB 的方程, λ 是待定的系数.

(2) 过直线 $l: Ax+By+C=0$ 与圆 $C: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的交点的圆系方程是 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$, λ 是待定的系数.

(3) 过圆 $C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 与圆 $C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的交点的圆系方程是 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$, λ 是待定的系数.

1.12 点与圆的位置关系

点 $P(x_0, y_0)$ 与圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的位置关系有三种

若 $d = \sqrt{(a-x_0)^2 + (b-y_0)^2}$, 则

$d > r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆外; $d = r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆上; $d < r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆内.

1.13 直线与圆的位置关系

直线 $Ax + By + C = 0$ 与圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的位置关系有三种：

$$d > r \Leftrightarrow \text{相离} \Leftrightarrow \Delta < 0;$$

$$d = r \Leftrightarrow \text{相切} \Leftrightarrow \Delta = 0;$$

$$d < r \Leftrightarrow \text{相交} \Leftrightarrow \Delta > 0.$$

$$\text{其中 } d = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

1.14 两圆位置关系的判定方法

设两圆圆心分别为 O_1, O_2 , 半径分别为 r_1, r_2 , $|O_1O_2| = d$

$$d > r_1 + r_2 \Leftrightarrow \text{外离} \Leftrightarrow 4 \text{条公切线};$$

$$d = r_1 + r_2 \Leftrightarrow \text{外切} \Leftrightarrow 3 \text{条公切线};$$

$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2 \Leftrightarrow \text{相交} \Leftrightarrow 2 \text{条公切线};$$

$$d = |r_1 - r_2| \Leftrightarrow \text{内切} \Leftrightarrow 1 \text{条公切线};$$

$$0 < d < |r_1 - r_2| \Leftrightarrow \text{内含} \Leftrightarrow \text{无公切线}.$$

1.15 圆的切线方程

(1) 已知圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

①若已知切点 (x_0, y_0) 在圆上, 则切线只有一条, 其方程是

$$x_0x + y_0y + \frac{D(x_0 + x)}{2} + \frac{E(y_0 + y)}{2} + F = 0.$$

当 (x_0, y_0) 圆外时, $x_0x + y_0y + \frac{D(x_0 + x)}{2} + \frac{E(y_0 + y)}{2} + F = 0$ 表示过两个切点的切点弦方程.

②过圆外一点的切线方程可设为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 再利用相切条件求 k , 这时必有两条切线, 注意不要漏掉平行于 y 轴的切线.

③斜率为 k 的切线方程可设为 $y = kx + b$, 再利用相切条件求 b , 必有两条切线.

(2) 已知圆 $x^2 + y^2 = r^2$.

①过圆上的 $P_0(x_0, y_0)$ 点的切线方程为 $x_0x + y_0y = r^2$;

②斜率为 k 的圆的切线方程为 $y = kx \pm r\sqrt{1+k^2}$.

2 圆锥曲线方程

2.1 椭圆的参数方程

$$\text{椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 的参数方程是 } \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}.$$

2.2 椭圆的焦半径公式

$$\text{椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 焦半径公式}$$

$$|PF_1| = e(x + \frac{a^2}{c}), \quad |PF_2| = e(\frac{a^2}{c} - x).$$

2.3 椭圆的内外部

$$(1) \text{ 点 } P(x_0, y_0) \text{ 在椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 的内部} \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1.$$

$$(2) \text{ 点 } P(x_0, y_0) \text{ 在椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 的外部} \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1.$$

2.4 椭圆的切线方程

$$(1) \text{ 椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 上一点 } P(x_0, y_0) \text{ 处的切线方程是 } \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

$$(2) \text{ 过椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 外一点 } P(x_0, y_0) \text{ 所引两条切线的切点弦方程是 } \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

$$(3) \text{ 椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 与直线 } Ax + By + C = 0 \text{ 相切的条件是 } A^2 a^2 + B^2 b^2 = C^2.$$

2.5 双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0) \text{ 的焦半径公式 } |PF_1| = |e(x + \frac{a^2}{c})|, \quad |PF_2| = |e(\frac{a^2}{c} - x)|.$$

2.6 双曲线的内外部

- (1) 点 $P(x_0, y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的内部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} > 1$.
- (2) 点 $P(x_0, y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的外部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} < 1$.

2.7 双曲线的方程与渐近线方程的关系

- (1) 若双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ 渐近线方程: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a}x$.
- (2) 若渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x \Leftrightarrow \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0 \Rightarrow$ 双曲线可设为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda$.
- (3) 若双曲线与 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 有公共渐近线, 可设为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda$ ($\lambda > 0$, 焦点在 x 轴上, $\lambda < 0$, 焦点在 y 轴上).

2.8 双曲线的切线方程

- (1) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$.
- (2) 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 外一点 $P(x_0, y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$.
- (3) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与直线 $Ax + By + C = 0$ 相切的条件是 $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$.

2.9 抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦半径公式

抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 焦半径 $|CF| = x_0 + \frac{p}{2}$.

过焦点弦长 $|CD| = x_1 + \frac{p}{2} + x_2 + \frac{p}{2} = x_1 + x_2 + p$.

2.10 抛物线

$y^2 = 2px$ 上的动点可设为 $P(\frac{y_0^2}{2p}, y_0)$ 或 $P(2pt^2, 2pt)$ 或 $P(x_0, y_0)$, 其中 $y_0^2 = 2px_0$.

2.11 二次函数

$y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ ($a \neq 0$) 的图象是抛物线: (1) 顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$; (2) 焦点的坐标为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a})$; (3) 准线方程是 $y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$.

2.12 抛物线的内外部

(1) 点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的内部 $\Leftrightarrow y^2 < 2px$ ($p > 0$).

点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的外部 $\Leftrightarrow y^2 > 2px$ ($p > 0$).

(2) 点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2 = -2px$ ($p > 0$) 的内部 $\Leftrightarrow y^2 < -2px$ ($p > 0$).

点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2 = -2px$ ($p > 0$) 的外部 $\Leftrightarrow y^2 > -2px$ ($p > 0$).

(3) 点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的内部 $\Leftrightarrow x^2 < 2py$ ($p > 0$).

点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的外部 $\Leftrightarrow x^2 > 2py$ ($p > 0$).

(4) 点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的内部 $\Leftrightarrow x^2 < 2py$ ($p > 0$).

点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $x^2 = -2py$ ($p > 0$) 的外部 $\Leftrightarrow x^2 > -2py$ ($p > 0$).

2.13 抛物线的切线方程

(1) 抛物线 $y^2 = 2px$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程是 $y_0 y = p(x + x_0)$.

(2) 过抛物线 $y^2 = 2px$ 外一点 $P(x_0, y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $y_0 y = p(x + x_0)$.

(3) 抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 与直线 $Ax + By + C = 0$ 相切的条件是 $pB^2 = 2AC$.

2.14 两个常见的曲线系方程

(1) 过曲线 $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ 的交点的曲线系方程是

$f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y) = 0$ (λ 为参数).

(2) 共焦点的有心圆锥曲线系方程 $\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1$, 其中 $k < \max\{a^2, b^2\}$. 当 $k > \min\{a^2, b^2\}$ 时, 表示椭圆; 当

$\min\{a^2, b^2\} < k < \max\{a^2, b^2\}$ 时, 表示双曲线.

2.15 直线与圆锥曲线相交的弦长公式

$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 或

$$|AB| = \sqrt{(1+k^2)(x_2-x_1)^2} = |x_1-x_2| \sqrt{1+\tan^2 \alpha} = |y_1-y_2| \sqrt{1+\cot^2 \alpha} \quad (\text{弦端点 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 由方程 } \begin{cases} y = kx + b \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得到 } ax^2 + bx + c = 0, \Delta > 0, \alpha \text{ 为直线 } AB \text{ 的倾斜角, } k \text{ 为直线的斜率}).$$

2.16 圆锥曲线的两类对称问题

(1) 曲线 $F(x, y) = 0$ 关于点 $P(x_0, y_0)$ 成中心对称的曲线是 $F(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0$.

(2) 曲线 $F(x, y) = 0$ 关于直线 $Ax + By + C = 0$ 成轴对称的曲线是

$$F\left(x - \frac{2A(Ax + By + C)}{A^2 + B^2}, y - \frac{2B(Ax + By + C)}{A^2 + B^2}\right) = 0.$$

2.17 “四线”一方程

对于一般的二次曲线 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, 用 x_0x 代 x^2 , 用 y_0y 代 y^2 , 用 $\frac{x_0y + xy_0}{2}$ 代 xy , 用 $\frac{x_0 + x}{2}$ 代 x , 用 $\frac{y_0 + y}{2}$ 代 y 即得方程

$$Ax_0x + B \cdot \frac{x_0y + xy_0}{2} + Cy_0y + D \cdot \frac{x_0 + x}{2} + E \cdot \frac{y_0 + y}{2} + F = 0, \text{ 曲线的切线, 切点弦, 中点弦, 弦中点方程均是此方程得到.}$$

3 立体几何

3.1 证明直线与直线的平行的思考途径

- (1) 转化为判定共面二直线无交点;
- (2) 转化为二直线同与第三条直线平行;
- (3) 转化为线面平行;
- (4) 转化为线面垂直;
- (5) 转化为面面平行.

3.2 证明直线与平面的平行的思考途径

- (1) 转化为直线与平面无公共点;
- (2) 转化为线线平行;
- (3) 转化为面面平行.

3.3 证明平面与平面平行的思考途径

- (1) 转化为判定二平面无公共点;
- (2) 转化为线面平行;
- (3) 转化为线面垂直.

3.4 证明直线与直线的垂直的思考途径

- (1) 转化为相交垂直;
- (2) 转化为线面垂直;
- (3) 转化为线与另一线的射影垂直;
- (4) 转化为线与形成射影的斜线垂直.

3.5 证明直线与平面垂直的思考途径

- (1) 转化为该直线与平面内任一直线垂直;
- (2) 转化为该直线与平面内相交二直线垂直;
- (3) 转化为该直线与平面的一条垂线平行;
- (4) 转化为该直线垂直于另一个平行平面;
- (5) 转化为该直线与两个垂直平面的交线垂直.

3.6 证明平面与平面的垂直的思考途径

- (1) 转化为判断二面角是直二面角;
- (2) 转化为线面垂直.

3.7 空间向量的加法与数乘向量运算的运算律

- (1) 加法交换律: $a+b=b+a$.
- (2) 加法结合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$.
- (3) 数乘分配律: $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$.

3.8 平面向量加法的平行四边形法则向空间的推广

始点相同且不在同一个平面内的三个向量之和, 等于以这三个向量为棱的平行六面体的以公共始点为始点的对角线所表示的向量.

3.9 共线向量定理

对空间任意两个向量 a 、 $b(b \neq 0)$, $a \parallel b \Leftrightarrow$ 存在实数 λ 使 $a = \lambda b$.

$$P、A、B \text{ 三点共线} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (1-t) \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB}.$$

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}、\overrightarrow{CD} \text{ 共线且 } \overrightarrow{AB}、\overrightarrow{CD} \text{ 不共线} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = t \overrightarrow{CD} \text{ 且 } \overrightarrow{AB}、\overrightarrow{CD} \text{ 不共线}.$$

3.10 共面向量定理

向量 p 与两个不共线的向量 a 、 b 共面的 $\Leftrightarrow$ 存在实数对 x, y , 使 $p = ax + by$.

推论 空间一点 P 位于平面 MAB 内的 $\Leftrightarrow$ 存在有序实数对 x, y , 使 $\vec{MP} = x\vec{MA} + y\vec{MB}$,

或对空间任一定点 O , 有序实数对 x, y , 使 $\vec{OP} = \vec{OM} + x\vec{MA} + y\vec{MB}$.

3.11 空间点向量

对空间任一点 O 和不共线的三点 A 、 B 、 C , 满足 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$ ($x + y + z = k$), 则当 $k = 1$ 时, 对于空间任一点 O , 总有 P 、 A 、 B 、 C 四点共面; 当 $k \neq 1$ 时, 若 $O \in$ 平面 ABC , 则 P 、 A 、 B 、 C 四点共面; 若 $O \notin$ 平面 ABC , 则 P 、 A 、 B 、 C 四点不共面.

A 、 B 、 C 、 D 四点共面 $\Leftrightarrow \vec{AD}$ 与 $\vec{AB}$ 、 $\vec{AC}$ 共面 $\Leftrightarrow \vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC} \Leftrightarrow$

$\vec{OD} = (1 - x - y)\vec{OA} + x\vec{OB} + y\vec{OC}$ ($O \notin$ 平面 ABC).

3.12 空间向量基本定理

如果三个向量 a 、 b 、 c 不共面, 那么对空间任一向量 p , 存在一个唯一的有序实数组 x, y, z , 使 $p = xa + yb + zc$.

推论 设 O 、 A 、 B 、 C 是不共面的四点, 则对空间任一点 P , 都存在唯一的三个有序实数 x, y, z , 使 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$.

3.13 射影公式

已知向量 $\vec{AB} = a$ 和轴 l , e 是 l 上与 l 同方向的单位向量. 作 A 点在 l 上的射影 A' , 作 B 点在 l 上的射影 B' , 则

$$A'B' = |\vec{AB}| \cos \langle a, e \rangle = a \cdot e$$

3.14 向量的直角坐标运算

设 $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ 则

$$(1) a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3);$$

$$(2) a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3);$$

$$(3) \lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) \quad (\lambda \in \mathbb{R});$$

$$(4) a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3;$$

3.15 空间中的两点之间的向量计算

设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

3.16 空间的线线平行或垂直

设 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} (\vec{b} \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ z_1 = \lambda z_2 \end{cases};$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

3.17 向量夹角公式

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

推论 $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$, 此即三维柯西不等式.

3.18 四面体的对棱所成的角

四面体 $ABCD$ 中, AC 与 BD 所成的角为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{|(AB^2 + CD^2) - (BC^2 + DA^2)|}{2AC \cdot BD}.$$

3.19 异面直线所成角

$$\begin{aligned} \cos \theta &= |\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \\ &= \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \end{aligned}$$

(其中 θ ($0^\circ < \theta \leq 90^\circ$) 为异面直线 $\vec{a}, \vec{b}$ 所成角, $\vec{a}, \vec{b}$ 分别表示异面直线 $\vec{a}, \vec{b}$ 的方向向量)

3.20 直线 AB 与平面所成角

$$\beta = \arcsin \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{m}|}{|\vec{AB}| |\vec{m}|} \quad (\vec{m} \text{ 为平面 } \alpha \text{ 的法向量}).$$

3.21 三角形与所在平面

- 若 $\triangle ABC$ 所在平面与过 AB 的平面 α 成的角 θ , 另两边 AC, BC 与平面 α 成的角分别是 θ_1, θ_2 , A, B 为 $\triangle ABC$ 的两个内角, 则 $\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 = (\sin^2 A + \sin^2 B) \sin^2 \theta$.

特别地, 当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时, 有

$$\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 = \sin^2 \theta.$$

- 若 $\triangle ABC$ 所在平面与过 AB 的平面 α 成的角 θ , 另两边 AC, BC 与平面 α 成的角分别是 θ_1, θ_2 , A', B' 为 $\triangle ABO$ 的两个内角, 则 $\tan^2 \theta_1 + \tan^2 \theta_2 = (\sin^2 A' + \sin^2 B') \tan^2 \theta$.

特别地, 当 $\angle AOB = 90^\circ$ 时, 有

$$\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 = \sin^2 \theta.$$

3.22 二面角的平面角

$$\theta = \arccos \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} \text{ 或 } \pi - \arccos \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} \quad (\vec{m}, \vec{n} \text{ 为平面 } \alpha, \beta \text{ 的法向量}).$$

3.23 三余弦定理

设 AC 是 α 内的任一条直线, 且 $BC \perp AC$, 垂足为 C , 又设 AO 与 AB 所成的角为 θ_1 , AB 与 AC 所成的角为 θ_2 , AO 与 AC 所成的角为 θ . 则 $\cos \theta = \cos \theta_1 \cos \theta_2$.

3.24 三射线定理

若夹在平面角为 φ 的二面角间的线段与二面角的两个半平面所成的角是 θ_1, θ_2 , 与二面角的棱所成的角是 θ , 则有 $\sin^2 \varphi \sin^2 \theta = \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi$;
 $|\theta_1 - \theta_2| \leq \varphi \leq 180^\circ - (\theta_1 + \theta_2)$ (当且仅当 $\theta = 90^\circ$ 时等号成立).

3.25 空间两点间的距离公式

若 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$d_{A,B} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3.26 点 Q 到直线 l 距离

$$h = \frac{1}{|a|} \sqrt{(|a| |b|)^2 - (a \cdot b)^2} \quad (\text{点 } P \text{ 在直线 } l \text{ 上, 直线 } l \text{ 的方向向量 } a = \overrightarrow{PA}, \text{ 向量 } b = \overrightarrow{PQ}).$$

3.27 异面直线间的距离

$$d = \frac{|\vec{CD} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \quad (l_1, l_2 \text{ 是两异面直线, 其公垂向量为 } \vec{n}, C, D \text{ 分别是 } l_1, l_2 \text{ 上任一点, } d \text{ 为 } l_1, l_2 \text{ 间的距离}).$$

3.28 点B到平面 α 的距离

$$d = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \quad (\vec{n} \text{ 为平面 } \alpha \text{ 的法向量, } AB \text{ 是经过面 } \alpha \text{ 的一条斜线, } A \in \alpha).$$

3.29 异面直线上两点距离公式

$$d = \sqrt{h^2 + m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta}.$$

$$d = \sqrt{h^2 + m^2 + n^2 - 2mn \cos \langle \vec{EA'}, \vec{AF} \rangle}.$$

$$d = \sqrt{h^2 + m^2 + n^2 - 2mn \cos \varphi} \quad (\varphi = \angle E - \angle AA' - F).$$

(两条异面直线 a、b 所成的角为 θ , 其公垂线段 AA' 的长度为 h. 在直线 a、b 上分别取两点 E、F, $A'E = m$, $AF = n$, $EF = d$).

3.30 三个向量和平方的公式

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 &= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + 2|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + 2|\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cos \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle \end{aligned}$$

3.31 空间直线的射影

长度为 l 的线段在三条两两互相垂直的直线上的射影长分别为 l_1 、 l_2 、 l_3 , 夹角分别为 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 , 则有

$$l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 \Leftrightarrow \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_3 = 2.$$

(立体几何中长方体对角线长的公式是其特例).

3.32 面积射影定理

$$S = \frac{S'}{\cos \theta}.$$

(平面多边形及其射影的面积分别是 S 、 S' , 它们所在平面所成锐二面角的为 θ).

3.33 斜棱柱的直截面

已知斜棱柱的侧棱长是 l , 侧面积和体积分别是 $S_{\text{斜棱柱侧}}$ 和 $V_{\text{斜棱柱}}$, 它的直截面的周长和面积分别是 c_1 和 S_1 , 则

$$\textcircled{2} S_{\text{斜棱柱侧}} = c_1 l.$$

$$\textcircled{2} V_{\text{斜棱柱}} = S_1 l.$$

3.34 作截面的依据

三个平面两两相交, 有三条交线, 则这三条交线交于一点或互相平行.

3.35 棱锥的平行截面的性质

如果棱锥被平行于底面的平面所截, 那么所得的截面与底面相似, 截面面积与底面面积的比等于顶点到截面距离与棱锥高的平方比 (对应角相等, 对应边对应成比例的多边形是相似多边形, 相似多边形面积的比等于对应边的比的平方); 相应小棱锥与小棱锥的侧面积的比等于顶点到截面距离与棱锥高的平方比.

3.36 欧拉定理(欧拉公式)

$V + F - E = 2$ (简单多面体的顶点数 V 、棱数 E 和面数 F).

(1) $E =$ 各面多边形边数和的一半. 特别地, 若每个面的边数为 n 的多边形, 则面数 F 与棱数 E 的关系: $E = \frac{1}{2} nF$;

(2) 若每个顶点引出的棱数为 m , 则顶点数 V 与棱数 E 的关系: $E = \frac{1}{2} mV$.

3.37 球的面积和体积公式

球的半径是 R , 则其体积 $V = \frac{4}{3} \pi R^3$,

其表面积 $S = 4\pi R^2$.

3.38 球的组合体

(1) 球与长方体的组合体:

长方体的外接球的直径是长方体的体对角线长.

(2) 球与正方体的组合体:

正方体的内切球的直径是正方体的棱长, 正方体的棱切球的直径是正方体的面对角线长, 正方体的外接球的直径是正方体的体对角线长.

(3) 球与正四面体的组合体:

棱长为 a 的正四面体的内切球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{12} a$, 外接球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{4} a$.

3.39 柱体、锥体的体积

$$V_{\text{柱体}} = \frac{1}{3}Sh \quad (S \text{ 是柱体的底面积、} h \text{ 是柱体的高}).$$

$$V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3}Sh \quad (S \text{ 是锥体的底面积、} h \text{ 是锥体的高}).$$

