目录：

1.1 分类计数原理（加法原理）

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$$

1.2 分步计数原理（乘法原理）

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n.$$

1.3 排列数公式

$$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.（n，m \in \mathrm{N}^*，且 m \le n）.$$

注：规定 $0! = 1$.

1.4 排列恒等式

(1) $A_n^m = (n-m+1)A_n^{m-1}$；

(2) $A_n^m = \dfrac{n}{n-m} A_{n-1}^m$；

(3) $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$；

(4) $nA_n^n = A_{n+1}^{n+1} - A_n^n$；

(5) $A_{n+1}^m = A_n^m + mA_n^{m-1}$.

(6) $1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$.

1.5 组合数公式

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\times 2\times\cdots\times m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}（n \in \mathrm{N}^*，m \in N，且 m \le n）.$$

1.6 组合数的两个性质

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$；

(2) $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$.

注：规定 $C_n^0 = 1$.

1.7 组合恒等式

（1）$C_n^m=\frac{n-m+1}{m}C_n^{m-1}$；

（2）$C_n^m=\frac{n}{n-m}C_{n-1}^m$；

（3）$C_n^m=\frac{n}{m}C_{n-1}^{m-1}$；

（4）$\sum_{r=0}^{n}C_n^r=2^n$；

（5）$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\Lambda+C_n^r=C_{n+1}^{r+1}$.

(6) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\Lambda+C_n^r+\Lambda+C_n^n=2^n$.

(7) $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\Lambda=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\Lambda\ 2^{n-1}$.

(8) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\Lambda+nC_n^n=n2^{n-1}$.

(9) $C_m^rC_n^0+C_m^{r-1}C_n^1+\Lambda+C_m^{0r}C_n^r=C_{m+n}^r$.

(10) $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\Lambda+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$.

1.8 排列数与组合数的关系

$A_n^m=m!\cdot C_n^m$

1.9 单条件排列

以下各条的大前提是从n个元素中取m个元素的排列.

（1）“在位”与“不在位”

①某（特）元必在某位有A_{n-1}^{m-1}种；②某（特）元不在某位有$A_n^m-A_{n-1}^{m-1}$（补集思想）$=A_{n-1}^1A_{n-1}^{m-1}$（着眼位置）$=A_{n-1}^m+A_{m-1}^1A_{n-1}^{m-1}$（着眼元素）种.

（2）紧贴与插空（即相邻与不相邻）

①定位紧贴：$k(k\le m\le n)$个元在固定位的排列有$A_k^kA_{n-k}^{m-k}$种.

②浮动紧贴：n个元素的全排列把 k 个元排在一起的排法有$A_{n-k+1}^{n-k+1}A_k^k$种.注：此类问题常用捆绑法；

③插空：两组元素分别有 k、h 个（$k\le h+1$），把它们合在一起来作全排列，k 个的一组互不能挨近的所有排列数有$A_h^hA_{h+1}^k$种.

（3）两组元素各相同的插空

m个大球n个小球排成一列，小球必分开，问有多少种排法？

当$n>m+1$时，无解；当$n\le m+1$时，有$\frac{A_{m+1}^n}{A_n^n}=C_{m+1}^n$种排法.

（4）两组相同元素的排列：两组元素有 m 个和 n 个，各组元素分别相同的排列数为C_{m+n}^{n}.

1.10 分配问题

（1）(平均分组有归属问题)将相异的 m 、 n 个物件等分给 m 个人，各得 n 件，其分配方法数共有 $N=C_{mn}^{n}\cdot C_{mn-n}^{n}\cdot C_{mn-2n}^{n}\cdot\Lambda\cdot C_{2n}^{n}\cdot C_{n}^{n}=\frac{(mn)!}{(n!)^{m}}$.

（2）(平均分组无归属问题)将相异的 $m\cdot n$ 个物体等分为无记号或无顺序的 m 堆，其分配方法数共有

$N=\frac{C_{mn}^{n}\cdot C_{mn-n}^{n}\cdot C_{mn-2n}^{n}\ldots\cdot C_{2n}^{n}\cdot C_{n}^{n}}{m!}=\frac{(mn)!}{m!(n!)^{m}}$.

（3）(非平均分组有归属问题)将相异的 P $(P=n_1+n_2+L+n_m)$ 个物体分给 m 个人，物件必须被分完，分别得到 n_1， n_2，…， n_m 件，且 n_1， n_2，…， n_m 这 m 个数彼此不相等，则其分配方法数共有 $N=C_{p}^{n_1}\cdot C_{p-n_1}^{n_2}\ldots C_{n_m}^{n_m}\cdot m!=\frac{p!m!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$.

（4）(非完全平均分组有归属问题)将相异的 P $(P=n_1+n_2+L+n_m)$ 个物体分给 m 个人，物件必须被分完，分别得到 n_1， n_2，…， n_m 件，且 n_1， n_2，…， n_m 这 m 个数中分别有 a、b、c、…个相等，则其分配方法数有 $N=\frac{C_{p}^{n_1}\cdot C_{p-n_1}^{n_2}\ldots C_{n_m}^{n_m}\cdot m!}{a!b!c!\ldots}$ $=\frac{p!m!}{n_1!n_2!\ldots n_m!(a!b!c!\ldots)}$.

（5）(非平均分组无归属问题)将相异的 P $(P=n_1+n_2+L+n_m)$ 个物体分为任意的 n_1， n_2，…， n_m 件无记号的 m 堆，且 n_1， n_2，…， n_m 这 m 个数彼此不相等，则其分配方法数有 $N=\frac{p!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$.

（6）(非完全平均分组无归属问题)将相异的 P $(P=n_1+n_2+L+n_m)$ 个物体分为任意的 n_1， n_2，…， n_m 件无记号的 m 堆，且 n_1， n_2，…， n_m 这 m 个数中分别有 a、b、c、…个相等，则其分配方法数有 $N=\frac{p!}{n_1!n_2!\ldots n_m!(a!b!c!\ldots)}$.

（7）(限定分组有归属问题)将相异的 p（ $p=n_1+n_2+L+n_m$ ）个物体分给甲、乙、丙，……等 m 个人，物体必须被分完，如果指定甲得 n_1 件，乙得 n_2 件，丙得 n_3 件，…时，则无论 n_1， n_2，…， n_m 等 m 个数是否全相异或不全相异其分配方法数恒有

$$N=C_{p}^{n_1}\cdot C_{p-n_1}^{n_2}\ldots C_{n_m}^{n_m}=\frac{p!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}.$$

1.11 “错位问题”及其推广

贝努利装错笺问题:信 n 封信与 n 个信封全部错位的组合数为

$$f(n)=n![\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-L+(-1)^{n}\frac{1}{n!}].$$

推广：n 个元素与 n 个位置,其中至少有 m 个元素错位的不同组合总数为

$$\begin{aligned}f(n,m)&=n!-C_{m}^{1}(n-1)!+C_{m}^{2}(n-2)!-C_{m}^{3}(n-3)!+C_{m}^{4}(n-4)!\\&\quad-L+(-1)^{p}C_{m}^{p}(n-p)!+L+(-1)^{m}C_{m}^{m}(n-m)!\end{aligned}$$

$$=n![1-\frac{C_m^1}{A_n^1}+\frac{C_m^2}{A_n^2}-\frac{C_m^3}{A_n^2}+\frac{C_m^4}{A_n^4}-\cdots+(-1)^p\frac{C_m^p}{A_n^p}+\cdots+(-1)^m\frac{C_m^m}{A_n^m}].$$

1.12 不定方程解的个数

(1)方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）的正整数解有 C_{m-1}^{n-1} 个.

(2) 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）的非负整数解有 C_{n+m-1}^{n-1} 个.

(3) 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）满足条件 $x_i\ge k$ ($k\in N^*,2\le i\le n-1$)的非负整数解有 $C_{m+1-(n-2)(k-1)}^{n-1}$ 个.

(4) 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）满足条件 $x_i\le k$（$k\in N^*$，$2\le i\le n-1$）的正整数解有 $C_{n+m-1}^{n-1}-C_{n-2}^{1}C_{m+n-k-2}^{n-1}+C_{n-2}^{2}C_{m+n-2k-3}^{n-1}-\cdots+(-1)^{n-2}C_{n-2}^{n-2}C_{m+1-(n-2)k}^{n-1}$ 个.

1.13 二项式定理

二项式定理 $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$ ；

二项展开式的通项公式

$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$ $(r=0,1,2\cdots，n)$.